

8. Übung zur Elementaren Stochastik

Prof. Dr. Ehrhard Behrends, WS 2009/10

Ausgabe: 30. 11. 2009

Abgabe: am 8. 12. 2009 bis 16.00 Uhr in den Fächern der Tutoren

Bei einigen Aufgaben gibt es eine *-Version. Die ist für die ambitionierteren Übungsteilnehmer gedacht. Das gilt auch für die **-Aufgaben, bei denen wird unter den richtigen Lösungen auch ein Preis verlost. Bitte für jedes n auf dem gleichen Zettel höchstens eine der Aufgaben n , n^* , n^{**} bearbeiten, $n = 1, 2, 3, 4$.

Es seien X und Y Zufallsvariable. Unter der *Kovarianz* $Cov(X, Y)$ von X und Y versteht man dann die Zahl $E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$, falls alle diese Erwartungswerte existieren. Und X, Y heißen *unkorreliert* (!! zwei „r“, ein „l“!!), wenn diese Zahl gleich Null ist. Insbesondere sind also wegen Satz 6.4.1 unabhängige Zufallsvariable unkorreliert.

1. Wir betrachten wieder $[0, 1]$ mit der Gleichverteilung, $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $X(x) := x - 0.5$ definiert. Finden Sie eine Zufallsvariable $Y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, so dass X, Y unkorreliert, aber nicht unabhängig sind

1*. Der Wahrscheinlichkeitsraum und X seien wie vorstehend. Beweisen Sie: Ist $Y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und von X unabhängig, so ist Y konstant.

1.** Der Wahrscheinlichkeitsraum sei wie vorstehend. Ist die folgende Aussage richtig oder falsch? (Bei der Antwort „ja“ bitte ein Beweis; bei „nein“ ein Gegenbeispiel.)

!?!?!?! Sind $X, Y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und unabhängig, so ist eine dieser Funktionen konstant.

1.** (**leichtere Version**) Der Wahrscheinlichkeitsraum sei wie vorstehend. Man zeige: Ist X ein nichtkonstantes Polynom, $Y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und sind X, Y unabhängig, so ist Y konstant.

2. X, Y, Z seien $\mathbb{Z}$ -wertige Zufallsvariable, die auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind. Man zeige:

a) X, Y sind genau dann unabhängig, wenn für alle k, l die Ereignisse $\{X = k\}$ und $\{Y = l\}$ unabhängig sind.

b) Sind X, Y, Z unabhängig, so sind auch $X, Y + Z$ unabhängig.

3. Gegeben seien drei unabhängige Zufallsvariable X, Y, Z . Es gelte

$$P(X = 0) = 0.5, P(X = 2) = 0.2, P(X = 4) = 0.3;$$

$$P(Y = 0) = 0.1, P(Y = 2) = 0.2, P(Y = 3) = 0.7;$$

$$P(Z = 0) = 0.8, P(Z = 1) = 0.1, P(Z = 2) = 0.1;$$

a) Berechnen Sie die $P(X + Y + Z = k)$ für $k = 0, \dots, 9$.

b) Wie groß ist $P(2X + 3Y + 4Z = 6)$?

4. X bzw. Y seien unabhängige $[0, 1]$ -wertige Zufallsvariable, für die induzierten Wahrscheinlichkeitsmaße sollen Dichtefunktionen existieren: $x \mapsto 2x$ für X bzw. $x \mapsto 3x^2$ für Y . Bestimmen Sie die Dichtefunktion für das durch $X + Y$ induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß.

Hinweis: Hier soll natürlich Satz 6.4.2(ii) angewendet werden. Dazu sind X, Y als $\mathbb{R}^+$ -wertige Zufallsvariable aufzufassen, und die Dichten sind außerhalb von $[0, 1]$ Null zu setzen. Es empfiehlt sich, für die Berechnung von h eine Fallunterscheidung zu machen: $x \leq 1$ und $x \geq 1$.

Homepage der Veranstaltung: page.mi.fu-berlin.de/behrends/stochastik2009

Für den mathematischen „Arbeitsspeicher“ ...

Auf die folgenden Fragen sollte man jederzeit eine richtige Antwort geben können. Zur Not mit Hilfe eines vorbereiteten Zettels (der übrigens später bei der Klausur auch verwendet werden darf).

Arbeitsspeicher-Archiv: Nächste Seite

Neu: Was versteht man unter der „diskreten Faltung“ zweier Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{N}_0$, und in welchem Zusammenhang ist sie wichtig? Was ist die Faltung zweier Funktionen auf $\mathbb{R}^+$, und was lernt man aus der Faltung zweier Wahrscheinlichkeitsdichten auf $\mathbb{R}^+$? Was ist die Binomialverteilung?

... und hier noch Beispiele aus den „Arbeitsspeichern“ anderer Teilbereiche der Mathematik:

Ist $\mathcal{E}$ ein Mengensystem, d.h. eine Teilmenge der Potenzmenge einer Menge M , wie ist dann $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$ definiert? Und wie $\bigcap_{E \in \mathcal{E}} E$? Was ist eine offene, was eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$? Was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung? Was ist eine stetige Funktion? Was versteht man unter dem Zwischenwertsatz? Was ist $f^{-1}(A)$, wie ist die inverse Abbildung f^{-1} definiert (falls sie existiert)? Was heißt Konvergenz für Folgen und Reihen. Was ist eine absolut konvergente Reihe? Warum ist dieser Begriff für die Stochastik wichtig? Was ist eine Folge in einer Menge M ? **Neu:**

Stochastik am Computer: Anregungen

Viele Definitionen, Ergebnisse und Verfahren sind besser zu verstehen, wenn man zur Illustration Computer-Simulationen zur Verfügung hat. Es wird empfohlen, sich solche Simulationen selbst zu schreiben, viele Routinen findet man schon vorgefertigt in den meisten Programmpaketen.

Unterprogramme: Zufallszahlen erzeugen können (Laplace, Bernoulli, Poisson, geometrisch, Exponentialverteilung, Normalverteilung, ...); Häufigkeitsverteilungen skizzieren können (so genannte Histogramme). Monte-Carlo-Verfahren zur approximativen Integration. **Neu:**

Projekte: Test des Zufallszahlengenerators (etwa einige Millionen gleichverteilte Zufallszahlen in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ erzeugen und prüfen, ob alle Ergebnisse in etwa gleich oft vorkommen); einige Millionen Poissonverteilte Zufallszahlen erzeugen und ein Histogramm erstellen, ... Integrale ausrechnen mit Monte-Carlo-Verfahren und Güte-Test durch Vergleich mit dem exakten Ergebnis; **Neu:** Testläufe zum Übereinstimmungsparadoxon; p gleichverteilt in $[0, 1]$ wählen, dann für verschiedene k testen, wie groß die (experimentelle) bedingte Wahrscheinlichkeit für $k + 1$ Erfolge bei k Erfolgen ist.

Arbeitsspeicher-Archiv

Was ist eine σ -Algebra? Wie ist die σ -Algebra der Borelmengen definiert? Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum? Wie kann man einen Wahrscheinlichkeitsraum einfach definieren, wenn Ω höchstens abzählbar ist? Was versteht man unter a) der Gleichverteilung auf $\{1, \dots, n\}$, b) einem Laplaceraum, c) der Bernoulliverteilung, e) der Poissonverteilung, f) der geometrischen Verteilung? Wie kann man auf einem Intervall, versehen mit der σ -Algebra der Borelmengen, einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Hilfe einer Dichtefunktion definieren? Was versteht man unter a) Gleichverteilung, b) Exponentialverteilung, c) Normalverteilung? Was wird mit dem Buffonschen Nadelexperiment approximativ berechnet? Was ist eine Zufallsvariable? Wie ist der durch eine Zufallsvariable induzierte Wahrscheinlichkeitsraum definiert? Wie ist der Erwartungswert einer Zufallsvariablen im Fall diskreter Räume und bei Räumen mit Dichte definiert? Was sind Varianz und Streuung? Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n -elementigen Menge auszuwählen? In welchen Fällen verwendet man die hypergeometrische Verteilung? Was ist eine maximum-likelihood-Schätzung? Was ist das Übereinstimmungs-Paradoxon? Was versteht man unter „bedingter Wahrscheinlichkeit“? Wann heißen zwei Ereignisse unabhängig? Was bedeutet es, dass n Ereignisse unabhängig sind? Wann sind zwei (oder allgemeiner: n) Zufallsvariable unabhängig? Was weiß man über den Erwartungswert des Produkts zweier *unabhängiger* Zufallsvariablen, was über die Varianz der Summe? Was ist das „Wurzel- n -Gesetz“?